



**DALI**  
*Digits, Architectures et Logiciels Informatiques*

**Équipe de Recherche DALI**

Laboratoire LP2A, EA 3679  
Université de Perpignan

**Rapport à mi-parcours du contrat  
quadriennal 2003-2006 :  
période 2003-2004**

**Équipe DALI : Digits, Architectures et  
Logiciels Informatiques.**

Version étendue du 11  
mai 2005

**Université de Perpignan**

52 avenue Paul Alduy, 66860 Perpignan cedex, France  
Téléphone : +33(0)4.68.66.20.64  
Télécopieur : +33(0)4.68.66.22.87  
Adresse électronique : [dali@univ-perp.fr](mailto:dali@univ-perp.fr)



Rapport à mi-parcours du contrat quadriennal 2003-2006 :  
période 2003-2004

Équipe DALI : Digits, Architectures et Logiciels Informatiques.

Version étendue du 11 mai 2005

**Résumé**

Rapport d'activités de l'équipe DALI pour 2003-2005 à destination de la Direction de la Recherche (MENR) pour le bilan à mi-parcours du contrat quadriennal 2003-2006 de l'Université de Perpignan.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Descriptif</b>	<b>3</b>
1.1	Renseignements sur l'unité de recherche	3
1.2	Bilan financier 2003-2004	3
1.3	Ressources humaines	4
1.3.1	Liste du personnel	4
1.3.2	Liste nominative des doctorants encadrés dans l'unité de recherche	4
<b>2</b>	<b>Dossier scientifique</b>	<b>5</b>
2.1	Rapport scientifique concis	5
2.1.1	Micro-architecture superscalaire	5
2.1.2	Opérateurs arithmétiques	6
2.1.3	Fonctions élémentaires	6
2.1.4	Amélioration automatique de la précision	6
2.1.5	Interface symbolique-numérique	7
2.1.6	Autres thèmes	7
2.2	Bilan quantitatif sur 2002-2004	7
2.2.1	Les publications	7
2.2.2	Articles dans des actes de conférences internationales	8
2.2.3	Les communications	8
2.2.4	Ouvrages scientifiques (ou chapitres)	9
2.2.5	Rapport de recherche	9
2.2.6	Valorisation et reconnaissance scientifique	10
2.2.7	L'information scientifique et technique et la diffusion de la culture scientifique et technique	10
2.3	Utilisation des crédits sur 2003-2004	11
2.4	Déclaration de politique scientifique pour 2006-2009	11
2.4.1	Approximation de fonctions	11
2.4.2	Amélioration automatique de la précision	11
2.4.3	Vers le développement de nouvelles micro-architectures	12
<b>3</b>	<b>Rapport scientifique détaillé</b>	<b>13</b>
3.1	Microarchitecture superscalaire	13
3.1.1	Chargement des instructions : une alternative au cache de trace	13
3.1.2	Exécution en désordre des instructions : traitement distribué	13
3.1.3	Réduire la demande de bande passante vers la hiérarchie mémoire de donnée	14
3.2	Opérateurs arithmétiques	14
3.2.1	Amélioration de l'efficacité des programmes	14
3.2.2	La fusion des opérateurs matériels	14
3.2.3	Implication au niveau matériel	14
3.3	Fonctions élémentaires	14
3.3.1	Amélioration de l'efficacité des programmes	15
3.3.2	Amélioration de la précision des fonctions élémentaires : vers l'arrondi correct	15
3.4	Amélioration automatique de la précision	15
3.4.1	Plus de précision : pourquoi et comment	15
3.4.2	Objectifs et originalité de l'approche développée	16

3.4.3	Résultats obtenus	16
3.4.4	Perspectives	17
3.5	Interface symbolique-numérique	17
3.5.1	Travailler avec des données incertaines	17
3.5.2	Objectifs et originalité de l'approche développée	18
3.5.3	Résultats obtenus	18
3.5.4	Perspectives	18

# Chapitre 1

## Descriptif

### 1.1 Renseignements sur l'unité de recherche

Type d'unité de recherche

Équipe de recherche intégrée au laboratoire LP2A, EA3979 (responsable : M. POLIT) et soutenue par l'ACI Jeune Chercheur (JC-9276, 2003-2006) du Ministère délégué à la Recherche.

Intitulé complet de l'unité

Équipe DALI : Digits, Architectures et Logiciels Informatiques

Responsable

Philippe LANGLOIS, Professeur, 27ème section, langlois@univ-perp.fr.

Adresse officielle de l'unité

Université de Perpignan, Laboratoire LP2A  
52, av. Paul Alduy. 66860 Perpignan cedex  
Tél. : 04 68 66 21 35. Fax : 04 68 66 22 87

### 1.2 Bilan financier 2003-2004

Jusqu'au 31 juillet 2004, l'Équipe de Recherche DALI était intégrée et contractualisée avec le laboratoire MANO (EA1944). Depuis le 1er août 2004, elle fait partie du laboratoire LP2A (EA3969). Cette intégration a été accompagnée d'un transfert d'une quote-part de la dotation du Ministère, Direction de la Recherche, du laboratoire MANO vers le laboratoire LP2A (décision du Président de l'Université de Perpignan du 28/05/04).

<b>Nature des financements 2003-2004</b>	<b>Montant en euros</b>
Crédits (TTC) du Ministère Direction de la Recherche	(depuis le 01/09/04)
- crédits de fonctionnement	4236
- crédits d'équipement	545
- crédits de vacation	
<b>Total Ministère Direction de la Recherche (TTC)</b>	<b>4781</b>
Reversement BQR et ressources supplémentaires provenant de l'établissement (TTC)	5500
Collectivités territoriales (TTC)	1376
Fonds National pour la Science (TTC)	29400
<b>Total</b>	<b>41057</b>

## 1.3 Ressources humaines

### 1.3.1 Liste du personnel

Catégorie	Nom, Prénom	Date de naissance	Section CNU	Arrivée dans l'unité	Établ.
Enseignants-chercheurs	Professeurs				
	Goossens, Bernard	16/05/1956	27	01/09/2003	UP
	Langlois, Philippe	03/10/1963	27	01/09/2002	UP
Enseignants-chercheurs	Maîtres de conférences				
	Defour, David	22/04/1977	27	01/09/2003	UP
Enseignants-chercheurs	1/2 ATER				
	Benoît Bréholée	23/11/1976		01/09/2003	UP
	Christophe Nègre	13/01/1977		01/09/2004	UP
	Marc Ricordeau	16/08/1976		01/09/2003	UP
	Éric Vecchié			01/02/2005	UP
TOTAL	7				

### 1.3.2 Liste nominative des doctorants encadrés dans l'unité de recherche

Nom, Prénom	Directeur de thèse	Début de thèse	Mode de financement	DEA d'origine
Graillat Stef	Ph. Langlois	01/10/2002	AC	DEA UJF Grenoble 1
Louvet Nicolas	Ph. Langlois	01/10/2004	AM	DEA U. Amiens

Total des doctorants du 01/01/2003 au 31/12/2004 : 2

# Chapitre 2

## Dossier scientifique

### 2.1 Rapport scientifique concis

Les recherches actuelles de l'équipe DALI sont centrées sur l'arithmétique des ordinateurs et l'architecture des machines.

**Architecture des machines** En architecture des machines, la thématique est la micro-architecture des processeurs généralistes haute-performance. L'objectif est de contribuer à l'augmentation du degré superscalaire. Cela passe par une amélioration de la capacité d'extraction du processeur et par une extension de la capacité d'exécution en parallèle.

**Arithmétique des ordinateurs** En arithmétique des ordinateurs, nous contribuons à mieux comprendre la précision finie pour développer des logiciels adaptés aux applications qui soient à la fois numériquement fiables et performants. Nous nous intéressons plus particulièrement aux problèmes posés par l'arithmétique flottante (souvent dans le cadre de la norme IEEE-754) à plusieurs niveaux dans la chaîne de calcul : opérateurs arithmétiques, fonctions élémentaires, précision des résultats, problèmes bien posés et algorithmes fiables.

**Autres thèmes** En tant qu'équipe de recherche en informatique de l'Université de Perpignan, DALI accueille les enseignants-chercheurs temporaires (ATER) en informatique de l'établissement. Les thèmes de recherche de ces jeunes collègues ne relèvent pas toujours explicitement des axes précédents et sont donc ainsi décrits séparément. Nous nous efforçons d'interagir avec ces collègues (en particulier par l'intermédiaire du séminaire de l'équipe) tout en les incitant à faire vivre leurs collaborations plus naturelles. Les thèmes abordés en cette année 2004-2005 sont la cryptographie, la simulation distribuée, l'apprentissage et les systèmes réactifs.

#### 2.1.1 Micro-architecture superscalaire

**Participants :** David Defour et Bernard Goossens

Les prochaines générations de processeurs superscalaires devraient être capables de traiter 16 instructions par cycle. Cependant les techniques utilisées dans les processeurs actuels, que ce soit le BTB ou plus récemment le cache de trace et la prédiction multi-saut pour l'extracteur, ou la fenêtre centralisée d'instructions à lancer et le tampon de réordonnement sont des structures difficiles à étendre au-delà de 6 instructions par cycle. Nous avons donc proposé différentes solutions aux problèmes soulevés par ce type d'architecture pour tout le cycle de vie d'une instruction : chargement [5] à partir d'une construction dynamique des traces en se basant sur un banc de registre d'instructions contenant les blocs de base à extraire, décodage et exécution [6] à partir d'un traitement distribué des instructions.

## 2.1.2 Opérateurs arithmétiques

**Participants :** David Defour et Bernard Goossens

Pour améliorer l'efficacité des programmes et la qualité des calculs, on peut diminuer la latence des opérations, ce qui réduit le CPI global du processeur. On peut aussi augmenter le débit des opérateurs, ce qui réduit le cycle du processeur. On peut enfin diminuer le nombre d'instructions exécutées par exemple en fusionnant plusieurs opérations. À titre d'exemple on peut citer le *Fused Multiply and Add* qui est capable d'exécuter une multiplication suivie d'une addition.

Nous avons étudié quelles étaient les combinaisons d'opérateurs flottants intéressantes [2] parmi (+, ×, /). Cette étude fait ressortir que l'opérateur 'ADD2' qui additionne trois nombres flottants ensemble permet d'améliorer les performances des applications flottantes. Nous avons proposé une implémentation pour cet opérateur [3]. D'autres réalisations peuvent être envisagées, favorisant soit la latence, soit le débit, soit la limitation des ressources et en particulier le nombre de ports sur le banc de registre.

## 2.1.3 Fonctions élémentaires

**Participant :** David Defour

Les fonctions élémentaires (sinus, cosinus, exponentielle ...) sont calculées par des bibliothèques mathématiques libm qui font partie des couches basses du système d'exploitation. Le comportement de ces fonctions n'est pas spécifié par la norme IEEE-754.

On trouve aujourd'hui en plus des bibliothèques libres (glibc) celles proposées par des constructeurs comme Sun, Compaq, HP ou Intel. Cependant aucune de ces implémentations ne propose la propriété d'arrondi correct pour un coût raisonnable. C'est pour cette raison que l'on obtient des résultats extrêmement différents pour la même fonction sur une même entrée.

Les récentes avancées sur le dilemme du fabricant de table nous ont permis d'ouvrir une réflexion sur une spécification du comportement des fonctions élémentaires [4]. Dans l'objectif de normaliser le comportement des fonctions élémentaires nous avons défini une qualité garantie pour le résultat final.

Nous sommes également impliqués dans le développement d'une bibliothèque d'évaluation des fonctions élémentaires avec la propriété d'arrondi correct [1]. Cette bibliothèque distribuée sous licence GPL comprend actuellement sept fonctions.

## 2.1.4 Amélioration automatique de la précision

**Participants :** Philippe Langlois et Nicolas Louvet

La double précision IEEE-754 n'est pas toujours suffisante pour calculer de façon précise la solution de problèmes mal conditionnés. Plusieurs solutions logicielles simulant une plus grande précision à un coût raisonnable existent aujourd'hui : la quadruple précision (Sun, IBM), les bibliothèques de type "double-double" (travaux de Bailey *et al.*, UC Berkeley), la correction de la double précision (CENA, Langlois *et al.*).

Nous avons montré que la correction automatique d'algorithmes avec CENA permettait une précision double de celle du type flottant initial, ainsi qu'une validation du résultat corrigé [15]. La principale caractéristique originale de ces travaux est l'utilisation conjointe de propriétés fines de l'arithmétique des ordinateurs et des techniques mathématiques de l'analyse en précision finie.

Les récents travaux de Rump *et al.* (TU Hamburg) prouvent que la correction d'algorithmes élémentaires (sommes et produits scalaires) permet d'obtenir à la fois de meilleures performances que celles théoriquement attendues (grâce aux exécutions pipelinées des unités flottantes actuelles) et que les autres solutions logicielles (trop généralistes). De telles corrections sont des spécialisations de la correction automatique CENA [14].



## 2.1.5 Interface symbolique-numérique

**Participants :** Stef Graillat et Philippe Langlois

Les résultats d'expériences sont connus avec une incertitude comme par exemple celle introduite par les appareils de mesure, le codage des réels en flottants ou les calculs antérieurs. Ces valeurs incertaines apparaissent comme coefficients de fractions rationnelles en traitement du signal, CAO, etc. Le calcul de zéros et de PGCD de ces polynômes perturbés permet de les simplifier.

Nous nous intéressons à la notion de *pseudozéros* [?]. Il s'agit de l'ensemble des zéros des polynômes "proches" d'un polynôme donné. Assez peu de travaux, mais surtout très peu d'applications concrètes des pseudozéros sont connus. Nous approfondissons la connaissance théorique de cet ensemble, par exemple en étudiant l'effet de perturbations structurées [9].

Nous montrons aussi que des problèmes de la théorie du contrôle et du calcul formel peuvent être résolus grâce aux pseudozéros. Nous proposons un algorithme qui résout la  $\varepsilon$ -primalité de deux polynômes [7],[8]. En théorie du contrôle, un système stable est robuste stable s'il reste stable après de petites perturbations. Cette stabilité est souvent reliée aux racines d'un certain polynôme lié à la fonction de transfert du système. Nous montrons que les pseudozéros permettent de tester deux types de robuste stabilité [12], [?] . Pour un système stable, le rayon de stabilité est la plus grande perturbation qui laisse ce système stable. Nous introduisons des algorithmes (basés sur les pseudozéros) pour calculer ce rayon de stabilité [10].

## 2.1.6 Autres thèmes

**Participants :** Benoît Bréholée, Christophe Nègre, Marc Ricordeau et Christophe Vecchié

Les travaux de Ch. Nègre (thèse soutenue en juillet 2004, U. Montpellier 2) concernent l'implantation efficace des protocoles cryptographiques basés sur des courbes algébriques (elliptiques et hyperelliptiques). L'objectif principal est d'établir des algorithmes pour implanter l'arithmétique des corps finis et de ces courbes. Ch. Nègre collabore actuellement avec J.C. Bajard (LIRMM) –algorithme de multiplication dans les corps finis– et T. Berger (Limoges) –multiplication scalaire sur certaines courbes hyperelliptiques.

B. Bréholée étudie la notion générale de "domaine" dans la simulation distribuée, dans le cadre de l'architecture HLA. L'application est la conception et l'implémentation de ponts interconnectant des simulations distribuées à des fins d'interopérabilité, d'optimisation, de sécurité et d'extensibilité (directeur de thèse : P. Siron, ONERA, Toulouse; soutenance prévue le 28 février 2005). B. Bréholée poursuit sa collaboration sur CERTI, le prototype de noyau de simulation distribuée de l'ONERA.

M. Ricordeau travaille à la généralisation de l'apprentissage par renforcement ( directeurs de thèse : M. Liquière et J. Ferber, LIRMM; soutenance prévue en mars 2005 ). Il étudie une représentation évolutive de l'environnement à l'aide d'une structuration des observations de l'agent par des treillis de Galois ainsi que de la modification automatique des concepts que l'agent prend en compte pour le choix de ses actions.

É. Vecchié qui arrivera dans l'équipe en février 2005 travaille sur les systèmes réactifs en collaboration avec le projet Esterel (INRIA Sophia-Antipolis).

## 2.2 Bilan quantitatif sur 2002–2004

### 2.2.1 Les publications

**Articles dans des revues internationales**

- [1] Marc Daumas and Philippe Langlois. Additive symmetries : the non-negative case. *Theoret. Comput. Sci.*, 291(2) :143–157, January 2003. [http://dx.doi.org/10.1016/S0304-3975\(02\)00223-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0304-3975(02)00223-2).
- [2] D. Defour, G. Hanrot, V. Lefèvre, J.-M. Muller, N. Revol, and P. Zimmermann. Proposal for a standardization of mathematical function implementation in floating-point arithmetic. *Numerical Algorithms*, 2003.

- [3] B. Goossens. Typing the isa to cluster the processor. *Future Generation Computer Systems*, 18 :789–796, 2002.
- [4] B. Goossens and D. Defour. The instruction register file micro-architecture. *Future Generation Computer Systems*, 19, 2004.
- [5] Philippe Langlois. More accuracy at fixed precision. *J. Comp. Appl. Math.*, 162(1) :57–77, January 2004.
- [6] Philippe Langlois and Nathalie Revol. Validating polynomial numerical computation with complementary automatic methods. *Math. and Comp. in Sim.*, to appear 2005.

### 2.2.2 Articles dans des actes de conférences internationales

- [7] Yamine Aït-Ameur, Benoît Bréholée, Patrick Girard, Laurent Guittet, and Francis Jambon. Formal verification and validation of interactive systems specifications. In *Proceedings of the HESSD 2004 (Human Error, Safety and Systems Development)*, august 2004.
- [8] B. Bréholée and P. Siron. Certi : Evolutions of the onera rti prototype. In *Proceedings of the 2002 Fall Simulation Interoperability Workshop*, 2002.
- [9] B. Bréholée and P. Siron. Design and implementation of a hla inter-federation bridge. In *Proceedings of the 2003 European Simulation Interoperability Workshop*, 2003.
- [10] D. Defour and F. de Dinechin. Software carry-save for fast multiple-precision algorithms. In *35th International Congress of Mathematical Software.*, pages 29–40, Beijing , China, August 2002.
- [11] D. Defour, F. de Dinechin, and J.M. Muller. A new scheme for table-based evaluation of functions. In *36th Conference on signals, systems and computers conference*, pages 1608–1613, Asilomar, USA, November 2002.
- [12] B. Goossens. The instruction register file. volume LNCS 2763, pages 467–481, Nijnyi-Novgorod, Russia, september 2003. PaCT-7, Springer-Verlag.
- [13] Stef Graillat. Computation of pseudozero abscissa. In Dana Petcu et al., editors, *Proceedings of the 6th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, Timisoara, Romania*, pages 176–187, September 2004.
- [14] Stef Graillat and Philippe Langlois. Testing polynomial primality with pseudozeros. In Jean-Claude Bajard et al., editors, *RNC-5, Real Numbers and Computer Conference, Lyon, France*, pages 121–137, September 2003.
- [15] Stef Graillat and Philippe Langlois. A comparison of real and complex pseudozero sets for polynomials with real coefficients. In Christiane Frougny et al., editors, *RNC-6, Real Numbers and Computer Conference, Schloss Dagstuhl, Germany*, November 2004.
- [16] Stef Graillat and Philippe Langlois. Pseudozero set decides on polynomial stability. In *Proceedings of the Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Leuven, Belgium*, July 2004. (CD-ROM, papers/537.pdf).
- [17] Marc Ricordeau. Q-Concept-Learning : Generalization with Concept Lattice Representation in Reinforcement Learning. In *Proceedings of the 15th IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence*, pages 316–324, Sacramento, USA, November 2003.
- [18] Marc Ricordeau. Q-Concept-Learning : Généralisation à l’aide de treillis de Galois dans l’Apprentissage par Renforcement. In *Proceedings of 14ème Congrès Francophone Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle*, pages 385-394, Toulouse, France, Janvier 2004.

### 2.2.3 Les communications

#### Communications internationales

- [19] B. Bréholée and P. Siron. Bridges in hla distributed simulations. In *International Industrial Simulation Conference 2003*, 2003.
- [20] D. Defour and F. de Dinechin. Software carry-save : A case study for instruction-level parallelism. In *7th conference on parallel computing technologies*, Nizhny-Novgorod, september 2003.

- [21] S. Graillat. Some results on structured pseudospectra. In *Pseudospectra and Structural Dynamics*, University of Bristol, December 13-15, 2004.
- [22] S. Graillat. Some applications of polynomial pseudozero set. In *New Frontiers in Computational Mathematics*, University of Manchester, January 10-11, 2004.
- [23] Stef Graillat and Philippe Langlois. Approximate polynomial problems and associated tools. In *11th GAMM - IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics, Fukuoka, Japan*, October 2004.
- [24] Philippe Langlois. Improving the CENA method with the IA'64, itanium(tm) processor. In *10th GAMM - IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics (SCAN2002)*. GAMM-IMACS, September 2002. (Slides available at URL = —<http://www.univ-perp.fr/~langlois>—).
- [25] Philippe Langlois. Automatic enhancement of floating point accuracy. In *11th GAMM - IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics, Fukuoka, Japan*, October 2004.

## Communications nationales

- [26] S. Graillat. Pseudozéros numériques pour polynômes symboliques Journées Liens Calcul Numérique-Calcul Formel, 4-6 décembre 2002, Toulouse

### 2.2.4 Ouvrages scientifiques (ou chapitres)

- [27] Alain Barraud, Claude Brezinski, Jean-Marie Chesneaux, Philippe Langlois, Suzanne Lesecq, Nelson Maculan, Anass Nagih, Agnès Plateau, Gérard Plateau, and Josselin Visconti. *Outils d'analyse numérique pour l'Automatique*, chapter 1, pages 19–52. Traité IC2. Hermès Science, 2002. ISBN 2-7462-0421-5.
- [28] B. Goossens. *Architecture et microarchitecture des processeurs*. Springer-Verlag, june 2002.

### 2.2.5 Rapport de recherche

- [29] F. de Dinechin, D. Defour, and C. Lauter. Fast correct rounding of elementary functions in double precision using double-extended arithmetic. Technical Report RR-5137, INRIA, March 2004. Also available as LIP report 2004-10.
- [30] F. de Dinechin, D. Defour, and C. Lauter. Fast correct rounding of elementary functions in double precision using double-extended arithmetic. Technical Report RR2004-10, LIP, École Normale Supérieure de Lyon, March 2004. Also available as INRIA report RR-5137.
- [31] D. Defour. Cache-optimised methods for the evaluation of elementary functions. Technical Report RR2002-38, LIP, École Normale Supérieure de Lyon, October 2002.
- [32] D. Defour. Collapsing dependent floating point operations. Research Report 02, DALI Research Team, LP2A, University of Perpignan, France, 52 avenue Paul Alduy, 66860 Perpignan cedex, France, december 2004. Submitted to IMACS 2005.
- [33] D. Defour and F. de Dinechin. Software carry-save for fast multiple-precision algorithms. Technical Report RR2002-08, LIP, École Normale Supérieure de Lyon, January 2002.
- [34] D. Defour, F. de Dinechin, and J.M. Muller. A new scheme for table-based evaluation of functions. Technical Report rr-4637, INRIA, November 2002.
- [35] D. Defour, F. de Dinechin, and J.M. Muller. A new scheme for table-based evaluation of functions. Technical Report RR2002-45, LIP, École Normale Supérieure de Lyon, November 2002.
- [36] D. Defour, F. de Dinechin, and J.M. Muller. Proof of correct rounding for the exponential function. Technical Report RR2003-37, LIP, École Normale Supérieure de Lyon, July 2002.
- [37] D. Defour and B. Goossens. Implémentation de l'opérateur add2. Research Report 03, DALI Research Team, LP2A, University of Perpignan, France, 52 avenue Paul Alduy, 66860 Perpignan cedex, France, december 2004. Submitted to SYMPA 2005.

- [38] B. Goossens and D. Defour. Ordonnancement dynamique distribué. Research Report 04, DALI Research Team, LP2A, University of Perpignan, France, 52 avenue Paul Alduy, 66860 Perpignan cedex, France, december 2004. Submitted to SYMPA 2005.
- [39] Stef Graillat and Philippe Langlois. Computation of stability radius for polynomials. Preprint No31, Laboratoire MANO, January 2004. Submitted.
- [40] Stef Graillat and Philippe Langlois. More on pseudozeros for univariate polynomials. Preprint No32, Laboratoire MANO, January 2004. Submitted.

### 2.2.6 Valorisation et reconnaissance scientifique

- ACI jeune chercheur 2003-2006 (JC-9276) *Création d'une équipe de recherche en informatique sur la qualité du logiciel numérique et l'arithmétique des ordinateurs* (49kE) ; responsable : Ph. Langlois.
- AS CNRS *Validation numérique pour le calcul embarqué*. (20kE dont 3kE pour Perpignan). F. Rico (LIP6) et Ph. Langlois sont co-responsables.
- Journées Arinews (GDR ARP) à Perpignan-Banyuls, 5-6 novembre 2002. Organisation : S. Graillat et Ph. Langlois.
- Jury du prix de thèse SPECIF en 2004, membre : Ph. Langlois.
- Thèse de doctorat de l'Université Toulouse 3, spécialité informatique, de M. HAQUIN, soutenue le 26 septembre 2003 et intitulée *Séquences de branchements : prédiction de branchements et optimisation du chargement des instructions*. B. Goossens est examinateur et président du jury.
- Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6, spécialité Informatique, de M. CHARIKHI, soutenue le 14 janvier 2005 et intitulée *contrôle dynamique de calculs numériques d'intégrales multiples*. Ph. Langlois est rapporteur et membre du jury.

### 2.2.7 L'information scientifique et technique et la diffusion de la culture scientifique et technique

#### Enseignements de troisième cycle et diffusion de la recherche

- École Doctorale Information, Structures, Systèmes. Université Montpellier II. Responsable J. NARNARD *Arithmétique des ordinateurs orientée validation numérique et virgule flottante*. Cours du DEA Informatique, 10 heures en 2003-04 et 2004-05, Ph. Langlois.
- Ecole de printemps Architectures des systèmes enfouis et méthodes de conception associées, Roscoff, avril 2003. *Influence of Processor Architecture on the Evaluation of Elementary Functions*, (Poster), D. Defour.
- École thématique du CNRS sur l'adéquation algorithmes et arithmétiques, Dijon, Mars 2003. Responsables M. Daumas et D. Michellucci.
  - Co-organisation de l'école et présentation du cours *Aspects propres au calcul en précision finie*, Ph. Langlois.
  - Présentation du cours *Le parcours des nombres dans les processeurs en 2003*, D. Defour.
- École Jeunes Chercheurs en Algorithmique et Calcul Formel, Grenoble, 29 mars - 2 avril 2004. *Pseudozéros de polynômes : théorie et applications.*, S. Graillat.
- Journées Arinews (GDR ARP), jan. 2002, Paris. *Les problèmes posés par la réduction d'argument*, D. Defour.
- Journées Arinews (GDR ARP), 17-18 nov. 2003, Lyon. *Calcul du rayon de stabilité pour les polynômes*, S. Graillat.
- Journées 4e année, 24 jan. 2003, ENS Cachan, antenne de Bretagne. *Calcul algébrique approché, une introduction*, S. Graillat.
- Séminaire d'informatique et de mathématiques du laboratoire MANO (2003) et de l'équipe DALI (2004). Organisateur : D. Defour.

#### Invitations des membres de l'équipe

- *The Evaluation of Elementary Functions with Fully Correct Rounding*, STmicroelectronics San Diego, août 2003, D. Defour

- *Généralisation à l'aide de treillis de Galois dans l'Apprentissage par Renforcement*, Séminaire de l'équipe MAIA (MACHINE Intelligente Autonome), LORIA, Nancy, et séminaire du laboratoire SeT (Systèmes et Transports), UTBM Belfort, mars 2004, M. Ricordeau.
- *Trace statique contre trace dynamique*, Université de Boumerdès, Algérie, avril 2004, B. Goossens.
- *Parcours et expérience d'un jeune maître de conférences*, Journée des doctorants du GDR ARP, octobre 2004, D. Defour
- CNRS/JSPS Invitation Fellowship Program for Research in Japan (short term). Réf. : S-04742. (4kE). Chuo University, Tokyo, Japan, octobre 2004. Ph. Langlois
- *Ordonnancement dynamique distribué*, Université de Boumerdès, Algérie, novembre 2004, B. Goossens.

## 2.3 Utilisation des crédits sur 2003-2004

Type de dépense	Montant (TTC en euros)
Équipement informatique	10205
Logiciels	2250
Missions	6824
Fournitures et matériel de bureaux	1620
Livres	1140
Photocopies	438
TOTAL	22477

## 2.4 Déclaration de politique scientifique pour 2006-2009

### 2.4.1 Approximation de fonctions

**Participant :** David Defour

Nous sommes actuellement impliqués dans le projet *crlibm* de réalisation d'une bibliothèque d'évaluation de fonctions élémentaires avec arrondi correct. Ce projet regroupe des membres de l'équipe Arénaire de l'ENS de Lyon, du projet SPACES de L'INRIA Lorraine et de l'équipe DALI de l'université de Perpignan. Nous continuerons de collaborer sur ce projet pour développer de nouveaux algorithmes, les implémenter et les prouver.

Pour être efficace et précis, les algorithmes d'évaluation de fonctions doivent exploiter judicieusement le matériel. Lors de leur développement, nous devons tenir compte des caractéristiques du support matériel, mais aussi continuer à explorer et proposer des modifications au sein de ce dernier (nouveaux opérateurs, structuration différente de la mémoire).

Les algorithmes développés doivent être implémentés dans un langage de haut niveau au sein d'un programme d'évaluation. Ce programme doit satisfaire un certain nombre de critères de qualité, notamment en terme de précision. La qualité numérique d'un programme se mesure en étudiant de quelle façon se propagent les erreurs au sein des différentes opérations flottantes qui composent le programme. Cette étude était jusqu'à présent effectuée de façon manuelle et donc très certainement entachée d'erreurs humaines. Pour réduire ces erreurs humaines, nous souhaitons développer un outil d'analyse de l'erreur d'un programme. Cet outil permettra d'obtenir des programmes dont la qualité numérique pourra être garantie.

### 2.4.2 Amélioration automatique de la précision

**Participants :** Philippe Langlois et Nicolas Louvet

Notre objectif est de développer des algorithmes à la fois rapides et dont la précision du résultat est similaire avec celle obtenue en doublant la précision utilisée.

D'un point de vue pratique, il s'agit ici de spécialiser la correction implantée par CENA afin d'obtenir les performances maximales. La clef de cette amélioration est l'utilisation de propriétés fines

de l'arithmétique flottante, et en particulier le calcul flottant des erreurs d'arrondis générées par les opérateurs arithmétiques flottants, `fmacompris`.

D'un point de vue théorique, cette spécialisation devrait aussi permettre de prouver formellement le comportement théorique équivalent à la précision double. Ces majorations théoriques seront accompagnées de l'algorithme de calcul dynamique de la borne qui garantit la validité du résultat corrigé.

Nous travaillons actuellement sur une des briques de base des bibliothèques d'algèbre linéaire : la résolution de systèmes linéaires triangulaires. Les premiers résultats obtenus prouvent un comportement dix fois plus rapide que l'utilisation des "double-double". L'étape essentielle en cours est la comparaison au raffinement itératif en précision étendue maintenant possible grâce aux nouvelles extended-BLAS et LAPACK. Nous étudierons l'extension de ce type d'approche à d'autres algorithmes.

### 2.4.3 Vers le développement de nouvelles micro-architectures

**Participants :** David Defour et Bernard Goossens

L'organisation superscalaire à exécution en désordre et spéculative représente l'état de l'art actuel. Cette organisation, si elle s'accorde bien à un niveau modéré d'ILP, n'est pas facilement extensible. L'extraction d'un plus grand nombre d'instructions, malgré l'adjonction d'un cache de trace, souffre de deux défauts : le cache en lui-même est une structure plus volumineuse qu'un cache ordinaire, ce qui tendrait à augmenter la latence. De plus, la prédiction de saut ne doit plus concerner un seul saut conditionnel, mais trois, ce qui augmente très fortement le taux d'échec. Ensuite, l'augmentation du nombre d'opérateurs induit une augmentation quadratique du nombre de ports d'accès au banc de registres.

Autour de ces problèmes, de nombreux travaux de recherche sont en cours. Nos propres travaux s'inscrivent dans ce cadre : banc de registre d'instruction, construction dynamique de traces, ordonnancement dynamique distribué. De nouvelles organisations sont proposées dont il faut mesurer l'efficacité et qu'il faut comparer aux propositions concurrentes.

# Chapitre 3

## Rapport scientifique détaillé

### 3.1 Microarchitecture superscalaire

**Participants :** David Defour et Bernard Goossens

#### 3.1.1 Chargement des instructions : une alternative au cache de trace

L'extension de la capacité de chargement d'instructions des processeurs est aujourd'hui basée sur le cache de trace. Cette proposition, bien que séduisante, souffre de quelques défauts. En premier lieu, le cache est volumineux car redondant. Cela aura certainement un impact sur la latence de l'étage d'extraction du pipeline du processeur. Ensuite, la prédiction des sauts repose sur le prédicteur multi-saut dont la précision est faible. Enfin, les techniques usuelles de prédiction de cible (BTB, pile des retours) s'adaptent mal au cache de trace dans la mesure où les traces issues du cache ne contiennent pas les adresses des différents blocs de base qui les composent et des sauts qu'elles contiennent.

Des travaux ont été menés qui ont abouti à la proposition d'un banc de registre d'instruction comme substitut au cache de trace. Le principal avantage du banc de registre sur le cache est de baser les traces sur une construction dynamique par assemblage de blocs de base. Il reste à compléter le mécanisme d'une part d'une structure de stockage des descripteurs de blocs de base et d'autre part d'un procédé de prédiction ou de calcul des adresses des blocs de base à extraire.

#### 3.1.2 Exécution en désordre des instructions : traitement distribué

L'exécution des instructions se fait en désordre, ce qui permet de mieux exploiter le parallélisme potentiel du code. Cependant, augmenter le parallélisme d'exécution requiert un accroissement de certaines ressources, notamment des registres de renommage et des unités fonctionnelles. Cette augmentation a un impact sévère sur le dimensionnement du chemin de données du processeur. Par exemple, la surface du banc de registre est une fonction quadratique du nombre de ports, lui-même étant une fonction linéaire du nombre d'instructions à exécuter. Un autre exemple est le réseau d'envoi des résultats vers les sources en attente dont la taille est proportionnelle au produit du nombre d'unités fonctionnelles par le nombre d'instructions emmagasinées.

Plutôt que de traiter les instructions de manière centralisée, nous avons proposé d'en distribuer le traitement. On peut ainsi obtenir une micro-architecture répartie, dont les composantes sont dupliquées, chaque copie ayant une capacité limitée, l'ensemble ayant le même potentiel qu'une micro-architecture centralisée mais avec une dimension nettement réduite. Par exemple, le banc de registre est distribué, chaque morceau étant composé de registres à quatre ports d'accès. Egalement, la diffusion des résultats peut être menée point à point, du registre de destination aux registres sources dépendants, ce qui est matériellement plus économique qu'une diffusion de type broadcast.

### 3.1.3 Réduire la demande de bande passante vers la hiérarchie mémoire de donnée

Deux facteurs contribuent à accroître la pression sur la bande passante de la mémoire. D'une part, l'augmentation du degré superscalaire induit celle des requêtes d'accès mémoire. D'autre part, la réduction du cycle s'accompagne d'une réduction de la taille du cache L1, ce qui augmente le nombre de requêtes à partir du second niveau hiérarchique.

Nous avons fait remarquer que l'augmentation du nombre de registres des micro-architectures modernes n'a pas été accompagné d'une réduction du nombre de requêtes d'accès à la mémoire. Autrement dit, disposer de plus de registres (en multipliant par exemple le nombre par 16 comme dans le pentium 4 qui dispose de 8 registres architecturaux et 128 registres de renommage) ne permet pas d'avoir moins recours aux accès mémoire. Cela tient au compilateur qui ne connaît du processeur que son architecture (8 registres pour le pentium 4) et produit de nombreuses instructions de va-et-vient registres-mémoire. Ces accès pourraient être remplacés par l'emploi de registres micro-architecturaux, diminuant le nombre de requêtes mémoire.

Dans un premier temps, nous souhaitons mesurer le nombre de requêtes mémoire concernant un simple va-et-vient de registre. Par la suite, il faut étudier un mécanisme matériel permettant de bénéficier de la richesse en registres sans toucher ni à l'architecture, ni au code.

## 3.2 Opérateurs arithmétiques

**Participants :** David Defour et Bernard Goossens

### 3.2.1 Amélioration de l'efficacité des programmes

Il existe plusieurs solutions pour améliorer l'efficacité des programmes. Une solution est de travailler sur l'algorithme lui-même en tenant compte des spécificités architecturales sur lesquels va s'exécuter le programme. Une autre solution est de travailler sur les opérations élémentaires constitutives des algorithmes. Ces opérations sont généralement implémentées en logicielle (ex : fonctions élémentaires) ou en matérielle (+, ×, /).

### 3.2.2 La fusion des opérateurs matériels

Pour améliorer les opérateurs matériels, on peut diminuer leurs latences, ce qui réduit le CPI global du processeur. On peut aussi augmenter leurs débits, ce qui réduit le cycle du processeur. On peut enfin diminuer le nombre d'instructions exécutées par exemple en fusionnant plusieurs opérations. Cette dernière technique est illustré à travers l'opérateur Fused Multiply and Add qui est capable d'exécuter une multiplication suivie d'une addition. Cet opérateur fait désormais partie de nombreuses architectures : Itanium, PowerPC, ...

Nous avons étudié quelles étaient les combinaisons d'opérateurs flottants intéressantes parmi (+, ×, /). Cette étude fait ressortir que l'opérateur 'ADD2' qui additionne trois nombres flottants ensemble permet d'améliorer sensiblement les performances des applications flottantes.

### 3.2.3 Implication au niveau matériel

Des travaux ont été menés pour proposer une première implémentation de l'opérateur ADD2. Cependant d'autres réalisations sur lesquelles nous devons travailler, peuvent être envisagées, favorisant soit la latence, soit le débit, soit la limitation des ressources et en particulier le nombre de ports sur le banc de registre.

## 3.3 Fonctions élémentaires

**Participant :** David Defour



### 3.3.1 Amélioration de l'efficacité des programmes

Il existe plusieurs solutions pour améliorer l'efficacité des programmes. Une solution est de travailler sur l'algorithme lui-même en tenant compte des spécificités architecturales sur lesquels va s'exécuter le programme. Une autre solution est de travailler sur les opérations élémentaires constitutives des algorithmes. Ces opérations sont généralement implémentées en logicielle (ex : fonctions élémentaires) ou en matérielle (+, ×, /).

### 3.3.2 Amélioration de la précision des fonctions élémentaires : vers l'arrondi correct

De nombreuses bibliothèques de calcul des fonctions élémentaires sont actuellement disponibles. Des constructeurs tels Sun, Compaq, HP ou Intel, proposent de telles bibliothèques avec leurs compilateurs lorsque leurs processeurs n'intègrent pas ces fonctions au niveau matériel. Cependant il n'existe pas d'implémentation efficace de ces fonctions avec la propriété d'arrondi correct. C'est pourquoi nous sommes impliqués dans le développement d'une bibliothèque d'évaluation des fonctions élémentaires avec la propriété d'arrondi correct. Cette bibliothèque, CRlibm est disponible à l'adresse suivante : <http://lipforge.ens-lyon.fr/projects/crlibm/>

## 3.4 Amélioration automatique de la précision

**Participants :** Philippe Langlois et Nicolas Louvet

### 3.4.1 Plus de précision : pourquoi et comment

La précision du résultat d'un calcul en précision finie dépend de trois facteurs : le conditionnement du problème à résoudre, la stabilité de l'algorithme numérique et la précision de l'arithmétique utilisée. Cette dernière est souvent l'arithmétique flottante binaire IEEE-754 qui permet une précision maximale de l'ordre de 16 chiffres décimaux en format long (double précision). Cette précision n'est pas suffisante si on cherche une solution précise de problèmes mal conditionnés. En effet, le nombre de chiffres décimaux perdus par les (bons) algorithmes numériques évolue comme l'ordre de grandeur du conditionnement du problème : il ne subsiste plus que 7 chiffres significatifs dans la solution calculée en double précision IEEE d'un problème dont le conditionnement est de l'ordre de  $10^9$ .

Plusieurs solutions permettent d'augmenter la précision de l'arithmétique utilisée. Une quadruple précision est proposée par quelques constructeurs (Sun) mais est hélas non portable. Des bibliothèques qui simulent une arithmétique flottante en précision arbitraire existent depuis assez longtemps (MP<sup>[1]</sup>, ARPREC et MPFUN90<sup>[2]</sup>). La plupart de ces bibliothèques représentent les quantités flottantes par autant d'entiers que nécessaire. La norme IEEE-754 ayant réduit la complexité de l'arithmétique flottante, la bibliothèque de précision arbitraire MPFR développée par l'INRIA<sup>[3]</sup> étend le modèle IEEE en précision arbitraire.

Certaines solutions mettent l'accent sur la rapidité (au détriment d'une précision arbitraire) en se limitant à une augmentation de précision fixée et en profitant des performances des unités matérielles flottantes. Les réalisations les plus abouties sont proposées par un groupe de chercheurs de Berkeley autour des travaux de D.H. Bailey : les bibliothèques "double-double" et "quad-double" implantent respectivement deux ou quatre fois la double précision IEEE<sup>[2]</sup>. L'arithmétique flottante est alors redéfinie sur des quantités représentées par la somme de deux ou quatre flottants en double précision (expansions de longueur deux ou quatre).

Toutes les solutions pour augmenter la précision présentées précédemment sont *logicielles*. Elles augmentent donc considérablement les temps de calcul : comptez par exemple un facteur 10 pour doubler

---

[1] Richard P. Brent. A Fortran multiple-precision arithmetic package. *ACM Trans. Math. Softw.*, 4(1) :57–70, 1978.

[2] High-precision software directory. URL = <http://crd.lbl.gov/~dhbailey/mpdist>.

[3] The MPFR library. URL = <http://www.mpfr.org/>.

la précision avec la bibliothèque “double-double” de Berkeley.

Une précision supérieure à la double précision IEEE était considérée par la plupart comme anecdotique jusqu’à très récemment. Dans [4], la nécessité de calculs intermédiaires en précision double de la précision courante est illustrée par quelques algorithmes numériques très utilisés et ce afin de justifier le développement de BLAS en précision étendue (X-BLAS : eXtended Basic Linear Algebra Subroutines). Les auteurs de ce rapport défendent l’utilisation de la bibliothèque “double-double”.

### 3.4.2 Objectifs et originalité de l’approche développée

Notre objectif est de proposer une **alternative aux “double-double”** qui soit à la fois **performante, fiable et portable**.

En matière de performance, nous développons des algorithmes dont la solution est d’une précision similaire à celle qui serait obtenue avec une précision deux fois supérieure à la double précision IEEE, et ce en un temps significativement inférieur à celui fourni par les “double-double”.

Coté fiabilité, ces algorithmes sont accompagnés de deux bornes d’erreur. L’une, statique, est établie formellement *a priori* et fournit une majoration de l’erreur dans le pire cas qui prouve un comportement en précision deux fois supérieure. L’autre, dynamique, permet de majorer la précision effective de la solution calculée.

Afin de garantir la portabilité maximale, les algorithmes et les majorations statiques et dynamiques d’erreur proposés utilisent principalement le modèle de l’arithmétique IEEE-754. De façon complémentaire, les optimisations apportées par l’opérateur `fma` (présent dans la famille Intel IA et l’IBM RS6000) sont aussi considérées.

Chaque opération arithmétique ( $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $/$ ,  $\sqrt{\phantom{x}}$ , `fma`) introduit une erreur d’arrondi élémentaire qui s’accumule en l’erreur globale de la solution d’un algorithme numérique. Notre approche consiste à **corriger, de façon adaptée à chaque algorithme, la contribution d’ordre 1 de ces erreurs élémentaires dans l’erreur globale**. Les propriétés des erreurs d’arrondi élémentaires et la mise en oeuvre de la correction permet la **majoration théorique *a priori*** de l’erreur résiduelle. Cette correction est accompagnée d’une **majoration dynamique** de l’erreur résiduelle.

Nous spécialisons ainsi la méthode de **correction automatique CENA** développée par Ph. Langlois.

### 3.4.3 Résultats obtenus

L’intérêt de la correction des erreurs d’arrondi élémentaires pour améliorer la précision des algorithmes numériques est assurée par les résultats que nous avons obtenu avec la méthode de correction automatique CENA. Il en est de même pour la validation dynamique de la précision du résultat ainsi corrigé [13],[15].

En effet, CENA automatise la correction des termes d’ordre 1 de l’erreur globale grâce à la différentiation automatique de l’algorithme et au calcul des erreurs d’arrondi élémentaires. La majoration dynamique de l’erreur résiduelle est obtenue par majoration dynamique de l’ensemble du processus de correction (différentiation automatique, calcul des erreurs élémentaires et des majorations éventuelles, correction). Les algorithmes corrigés exhibent un comportement numérique similaire à une exécution en précision double de la précision courante. Un tel comportement est expliqué dans [15] sans pouvoir être prouvé formellement dans le cadre général de la correction automatique. Parce qu’elle automatise la correction (l’algorithme est considéré comme une boîte noire), CENA est une méthode d’investigation où les performances sont secondaires.

La majoration dynamique de l’erreur résiduelle permet aussi d’invalider *a posteriori* le résultat non corrigé d’une certaine classe d’algorithmes. Nous avons identifié ces algorithmes qui admettent une erreur globale linéaire par rapport aux erreurs élémentaires. Certains algorithmes de base sont linéaires au sens de la correction CENA : citons, le produit scalaire, l’évaluation polynomiale et la résolution de système linéaire triangulaire [13].

---

[4] Xiaoye S. Li, James W. Demmel, David H. Bailey, Greg Henry, Yozo Hida, Jummy Iskandar, William Kahan, Suh Y. Kang, Anil Kapur, Michael C. Martin, Brandon J. Thompson, Teresa Tung, and Daniel J. Yoo. Design, implementation and testing of extended and mixed precision BLAS. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 28(2) :152–205, June 2002.

L'intérêt de la spécialisation d'une telle correction, à la fois pour obtenir des performances meilleures que les "double-double" et pour prouver formellement le comportement similaire au double de la précision courante, a été démontré récemment par Ogita, Rump et Oishi [5]. Ces auteurs considèrent le produit scalaire ; ils prouvent une majoration du type "erreur directe égale au conditionnement fois la précision au carré" et mesurent des performances réelles meilleures que le sur-coût théorique. Ce dernier point est justifié par les capacités super-scalaires des processeurs actuels.

Ces deux résultats justifient nos travaux actuels sur la résolution de systèmes triangulaires. Nous avons construit un algorithme de résolution corrigé dont les premières mesures de performances confirment toutes les attentes. Ce travail constitue la centre de la thèse de Doctorat de N. Louvet qui a démarrée en octobre 2004.

### 3.4.4 Perspectives

La correction de l'algorithme de résolution de systèmes linéaires triangulaires nécessite de creuser les points suivants.

En matière de performance et de portabilité, nous devons vérifier l'intérêt de la correction en prenant pour référence une implémentation ciblée des "double-double" et ce pour des architectures avec ou sans `fma`. L'objectif final est bien sûr d'être plus performant que les meilleures solutions actuellement proposées, en l'occurrence, la résolution LAPACK qui utilise le raffinement itératif en précision étendue.

En matière de fiabilité, nous devons construire un large panel de systèmes arbitrairement mal conditionnés (et ainsi compléter la Matrix Toolbox de N.J. Higham [6]). Les expérimentations pourront alors confirmer l'intérêt de la majoration dynamique comparativement aux bornes d'erreurs actuellement fournies par LAPACK [7]. Sous un angle théorique, nous devons prouver que la résolution corrigée vérifie le type de majoration précédent. Nous aurons alors une version corrigée susceptible d'être intégrée dans les bibliothèques spécialisées.

Grâce à CENA, nous poursuivrons aussi l'identification d'algorithmes qui bénéficient de la correction des erreurs d'arrondi pour ensuite les spécialiser. Nous disposerons ainsi de versions optimisées, fiables et portables d'algorithmes corrigés qui se comportent comme s'ils étaient exécutés en précision double de la précision courante.

Un autre domaine d'extension de ce type de méthode nécessite de disposer (d'estimations) des erreurs d'arrondi élémentaires pour les fonctions numériques type logarithme, exponentielle, ... Les résultats connus sur ce type de problème sont ceux obtenus sur le dilemme du fabricant de tables par J.M. Muller et ses étudiants. Nous proposons d'étudier un calcul économique d'estimateurs d'ordre 1 de ces erreurs élémentaires.

## 3.5 Interface symbolique-numérique

**Participants :** Stef Graillat et Philippe Langlois

### 3.5.1 Travailler avec des données incertaines

Les résultats d'expériences sont la plupart du temps connus avec une incertitude comme par exemple celle due aux appareils de mesure (erreurs de données) ou bien celles induites par le codage des réels en flottants et les calculs antérieurs en précision finie (erreurs d'arrondis). Ces valeurs incertaines apparaissent souvent comme coefficients de polynômes en traitement du signal, CAO, etc. Elles peuvent aussi apparaître comme coefficients dans des matrices. Dans ce contexte incertain, les notions de racines de polynômes et de valeurs propres de matrices doivent être redéfinies ainsi que les algorithmes et les outils qui permettent leur calcul.

---

[5] Takeshi Ogita, Siegfried M. Rump, and Shin'ichi Oishi. Accurate sum and dot product. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2005. (to appear).

[6] Nicholas J. Higham. The Test Matrix Toolbox for MATLAB (version 3.0). Numerical Analysis Report No. 276, Manchester Centre for Computational Mathematics, Manchester, England, September 1995.

[7] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, and D. Sorensen. *LAPACK Users' Guide*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, third edition, 1999.

Plusieurs approches (et les outils associés) ont été développés pour analyser la variation des solutions d'un problème en réponse à des variations des données. L'approche classique introduit la notion de *conditionnement* qui quantifie (au premier ordre) le ratio entre variation des solutions et variations des données. Une autre approche consiste à remplacer les données incertaines par des intervalles (voir [8]). Quand les données sont supposées suivre une loi de probabilité donnée, l'arithmétique stochastique de Vignes et Chesneaux et la librairie CADNA fournit une estimation probabiliste de la solution [9], [10].

### 3.5.2 Objectifs et originalité de l'approche développée

Notre objectif est de proposer des méthodes et des outils pour l'étude des **polynômes et des matrices à coefficients incertains**.

Nous nous intéressons plus particulièrement aux calculs de zéros de polynômes ainsi qu'aux calculs des valeurs propres d'une matrice.

Une façon de traiter les incertitudes sur les coefficients des polynômes est d'introduire la notion de *pseudozéros* [11]. Il s'agit de l'ensemble des zéros des polynômes « proches » d'un polynôme donné. Nous étudions les méthodes de calcul de cet ensemble. Peu de travaux avaient été effectués sur le sujet auparavant. Surtout, très peu d'applications concrètes avaient été proposées. Nous nous sommes donc naturellement posé la question de savoir si l'on pouvait répondre à des problèmes dans le domaine de la théorie du contrôle et du calcul formel grâce aux pseudozéros.

### 3.5.3 Résultats obtenus

Dans [7],[11],[8], nous proposons une méthode utilisant les pseudozéros afin de répondre au problème de la  $\varepsilon$ -primalité de deux polynômes.

En théorie du contrôle, on s'intéresse très souvent à la stabilité d'un système. Il se trouve que cette notion n'est pas toujours satisfaisante. En effet, il se peut qu'un système stable devienne instable après une petite perturbation. La notion plus appropriée est celle de la stabilité robuste. Un système est dit robuste stable s'il est stable et s'il reste stable après de petites perturbations. Il se trouve que la stabilité est souvent reliée aux racines d'un certain polynôme lié à la fonction de transfert du système. Les pseudozéros semblent donc être l'outil approprié pour tester cette robuste stabilité. Lorsque l'on a un système stable, on peut se demander jusqu'à quand on peut le perturber de façon à ce qu'il reste stable. La plus grande perturbation réalisant cette propriété est connue sous le nom de rayon de stabilité. Nous proposons dans [10],[12],[?] des algorithmes basé sur l'utilisation des pseudozéros afin de vérifier la robuste stabilité d'un système et de calculer ce rayon de stabilité.

### 3.5.4 Perspectives

Conditionnement réel de polynômes : Lorsque les polynômes utilisés sont réels, les nombres de conditionnement actuels autorisent des perturbations complexes de ces coefficients. Nous avons proposé de définir une nouvelle notion de conditionnement qui n'autorise que des perturbations réelles. Nous avons réussi à donner une formule calculable de ce conditionnement pour le problème de la recherche de racines simples et de l'évaluation polynomiale. Ce travail est encore en cours.

Pseudozéros de polynômes d'intervalles. Un polynôme d'intervalle est un polynôme dont les coefficients sont des intervalles réels. Les pseudozéros d'un polynôme d'intervalles sont les zéros des polynômes construits en prenant comme coefficient des éléments de chaque intervalle. La théorie des pseudozéros nous a permis de caractériser exactement ces ensembles. Nous sommes en train d'écrire une toolbox MATLAB permettant de tracer aisément ces ensembles.

---

[8] WWW resources about Interval Arithmetic. URL = <http://www.cs.utep.edu/interval-comp/main.html>.

[9] Jean Vignes. A stochastic arithmetic for reliable scientific computation. *Math. and Comp. in Sim.*, 35 :233–261, 1993.

[10] Jean-Marie Chesneaux, Stéphane Guilain, and Jean Vignes. La bibliothèque CADNA : présentation et utilisation. Manual, Laboratoire d'Informatique de Paris 6, Université P. et M. Curie, Paris, France, November 1996. Available at URL = <http://www-anp.lip6.fr/cadna/>, (in French).

[11] Ronald G. Mosier. Root neighborhoods of a polynomial. *Math. Comp.*, 47(175) :265–273, 1986.

# Bibliographie

- [1] F. de Dinechin, D. Defour, and C. Lauter. Fast correct rounding of elementary functions in double precision using double-extended arithmetic. Technical Report RR2004-10, LIP, École Normale Supérieure de Lyon, March 2004. Also available as INRIA report RR-5137.
- [2] D. Defour. Collapsing dependent floating point operations. rr 02, DALI Research Team, LP2A, University of Perpignan, France, inst-dali :adr, december 2004. Submitted to IMACS 2005.
- [3] D. Defour and B. Goossens. Implémentation de l'opérateur add2. rr 03, DALI Research Team, LP2A, University of Perpignan, France, inst-dali :adr, december 2004. Submitted to SYMPA 2005.
- [4] D. Defour, G. Hanrot, V. Lefèvre, J.-M. Muller, N. Revol, and P. Zimmermann. Proposal for a standardization of mathematical function implementation in floating-point arithmetic. *Numerical Algorithms*, 37(1-4) :367–375, 2004.
- [5] B. Goossens and D. Defour. The instruction register file micro-architecture. *Future Generation Computer Systems*, 19, 2004.
- [6] B. Goossens and D. Defour. Ordonnancement dynamique distribué. rr 04, DALI Research Team, LP2A, University of Perpignan, France, inst-dali :adr, december 2004. Submitted to SYMPA 2005.
- [7] Stef Graillat and Philippe Langlois. Testing polynomial primality with pseudozeros. In Jean-Claude Bajard et al., editors, *RNC-5, Real Numbers and Computer Conference, Lyon, France*, pages 121–137, September 2003.
- [8] Stef Graillat and Philippe Langlois. Approximate polynomial problems and associated tools. In *11th GAMM - IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics, Fukuoka, Japan*, October 2004.
- [9] Stef Graillat and Philippe Langlois. A comparison of real and complex pseudozero sets for polynomials with real coefficients. In Christiane Frougny et al., editors, *RNC-6, Real Numbers and Computer Conference, Schloss Dagstuhl, Germany*, November 2004.
- [10] Stef Graillat and Philippe Langlois. Computation of stability radius for polynomials. Preprint No31, Laboratoire MANO, January 2004.
- [11] Stef Graillat and Philippe Langlois. More on pseudozeros for univariate polynomials. Preprint No32, Laboratoire MANO, January 2004.
- [12] Stef Graillat and Philippe Langlois. Pseudozero set decides on polynomial stability. In *Proceedings of the Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Leuven, Belgium*, July 2004. (CD-ROM, papers/537.pdf).
- [13] Philippe Langlois. Automatic linear correction of rounding errors. *BIT*, 41(3) :515–539, September 2001.
- [14] Philippe Langlois. Automatic enhancement of floating point accuracy. In *11th GAMM - IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics, Fukuoka, Japan*, October 2004.
- [15] Philippe Langlois. More accuracy at fixed precision. *J. Comp. Appl. Math.*, 162(1) :57–77, January 2004.